ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σεπτέμβριος 2016

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2.5 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^4 + 5x + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι αυτή έχει μια απλή ρίζα ξ_1 στο διάστημα $I_1 = [-2, -1]$ και μια απλή ρίζα ξ_2 στο διάστημα $I_2 = [-1, 0]$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = -\frac{1}{5}(x_n^4 + 1), n = 0, 1, 2, \dots,$$

συγκλίνει στη ρίζα ξ_2, για κάθε επιλογή της αρχικής προσέγγισης x_0 στο διάστημα $I_2 = [-1, 0]$.

Θέμα 2 : Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss ή με τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης.

Θέμα 3 : Να προσαρμοστεί πολυώνυμο το πολύ δευτέρου βαθμού στον πίνακα τιμών της συνάρτησης f:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	0	4

χρησιμοποιώντας τον τύπο παρεμβολής του Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές. Αν $f \in C^3[0, 2]$ και $\max_{x \in [0,2]} |f^{(3)}(x)| = 6$, να βρεθεί ένα φράγμα για το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κατά την παρεμβολή στο διάστημα $[0, 2]$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα και ριζικά στους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Δοθέντος ότι η συνάρτηση f, που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-20	0	4	40

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων: $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ και $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η f.